1. (15pts.) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{X}}$$

Solución: Hallemos los autovalores de la matriz, raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)] = (2-\lambda)^3$$

Raíces: $\lambda_{1,2,3} = 2$

Hallemos los autovectores asociados

Para $\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} k_2 = -6k_3 \Rightarrow k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Recordemos que cuando obtenemos un autovector, su **multiplicidad geométrica** (cantidad de autovectores linealmente independientes) debe ser igual a la **multiplicidad algebraica** del autovalor (número de veces que se repite la raíz).

Como este es el caso de $M.A. > M.G.$ entonces, los autovectores restantes, serán de la forma:

$\overrightarrow{k_2} = \overrightarrow{k_1}t + \vec{p}$, donde $(A - \lambda I)\vec{p} = \overrightarrow{k_1}$

$\overrightarrow{k_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{k_1}t^2 + \vec{p}t + \vec{w}$, donde $(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{p}$

Hallemos $\overrightarrow{k_2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} p_2 = 1 - 6p_3 \Rightarrow p_2 = 1 \\ p_3 = 0 \\ p_1 = 0 \ \boldsymbol{libre} \end{cases} \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{k_2} = \overrightarrow{k_1}t + \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hallemos $\overrightarrow{k_3}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} w_2 = -6w_3 \Rightarrow w_2 = -\frac{6}{5} \\ w_3 = \frac{1}{5} \\ w_1 = 0 \ \boldsymbol{libre} \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{k_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{k_1}t^2 + \vec{p}t + \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t - \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**

Solución general del sistema:

$$\boldsymbol{X} = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t} + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]e^{2t} + C_3\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\-\frac{6}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}\right]e^{2t}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \boldsymbol{x(t)} = C_{\boldsymbol{1}}e^{2t} + C_2te^{2t} + \frac{1}{2}C_3t^2e^{2t} \\ \boldsymbol{y(t)} = C_{\boldsymbol{2}}e^{2t} + C_3(t-\frac{6}{5})e^{2t} \\ \boldsymbol{z(t)} = \frac{1}{5}C_3e^{2t} \end{cases}$$

2. (10pts.) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{2tx'' - x' + \frac{1}{x'} = 0}$$

Solución: Realizando el cambio $x' = u \Rightarrow x'' = u'$

$$2tu' - u + \frac{1}{u} = 0 \Rightarrow 2t\frac{du}{dt} = \frac{u^2-1}{u}$$

Por variable separable

$$\frac{u}{u^2-1}du = \frac{dt}{2t}$$

Integrando ambos lados

$$\int \frac{u}{u^2-1}du = \int \frac{dt}{2t}$$

Considerando $\int \frac{u}{u^2-1}du$ por fracciones simples

$$\int \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u^2-1}}\boldsymbol{du} = \int \frac{1}{2(u+1)}du + \int \frac{1}{2(u-1)}du = \frac{1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2}\ln(u-1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(u^2-1)}$$

Entonces

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(u^2-1) = \frac{1}{2}ln\, t + \frac{1}{2}ln\, C_1 \Rightarrow e^{ln(u^2-1)^{\frac{1}{2}}} = e^{ln(tC_1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow (u^2-1)^{\frac{1}{2}} = (tC_1)^{\frac{1}{2}}}$$

Despejando U:

$$\boldsymbol{u = \pm(tC_1+1)^{\frac{1}{2}} \overset{D.C.V}{\Rightarrow} x'_1 = (tC_1+1)^{\frac{1}{2}}\, ;\, x'_2 = -(tC_1+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Integrando ambos lados

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**

$$\int dx = \int (tC_1+1)^{\frac{1}{2}}\,dt \Rightarrow \boldsymbol{x = 2\frac{(tC_1+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C_2}$$

Solución general de la ecuación:

$$\boldsymbol{x_1 = 2\frac{(tC_1+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C_2} \quad ; \quad \boldsymbol{x_2 = -2\frac{(tC_1+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C_2}$$

3. (13pts.) Hallar la solución general de ecuación diferencial

$$\boldsymbol{y'' + y = \sec(x)}$$

Solución: La solución es de la forma $Y = y_h + y_p$

y_h: $\quad y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

Entonces

$y_h = C_1 e^{(i)x} + C_2 e^{(-i)x}$ donde $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$

$$\boldsymbol{y_h = C_1 cos\ x + C_2 sen\ x}$$

La solución particular, será de la forma

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ donde $u_1 = \int \frac{w_1}{w}$; $u_2 = \int \frac{w_2}{w}$; $w = \begin{vmatrix} cos\ x & sen\ x \\ -sen\ x & cos\ x \end{vmatrix} = 1$

$\boldsymbol{w_1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{sen\ x} \\ \boldsymbol{sec\ x} & \boldsymbol{cos\ x} \end{vmatrix} = \frac{\boldsymbol{-sen\ x}}{\boldsymbol{cos\ x}} = \boldsymbol{-tan\ x} \quad ; \quad \boldsymbol{w_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{cos\ x} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-sen\ x} & \boldsymbol{sec\ x} \end{vmatrix} = \frac{\boldsymbol{cos\ x}}{\boldsymbol{cos\ x}} = \boldsymbol{1}$

$$\boldsymbol{u_1} = \int \frac{w_1}{w} = \int -\tan x\ dx = \int \frac{-sen\ x}{\cos x} dx \begin{cases} t = \cos x \\ dt = -sen\ x\ dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \boldsymbol{\ln|\cos x|}$$

$$\boldsymbol{u_2} = \int \frac{w_2}{w} = \int dx = \boldsymbol{x}$$

Entonces

$$\boldsymbol{y_p = (\ln|\cos x|) cos\ x + x\ sen\ x}$$

Solución general de la ecuación:

$$\boldsymbol{Y = C_1 cos\ x + C_2 sen\ x + (\ln|\cos x|) cos\ x + x\ sen\ x}$$

4. (12pts.) Resolver el problema de valores iniciales

$$\boldsymbol{x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 1}$$

Solución: Aplicando el cambio $\boldsymbol{x = e^t}$; $\boldsymbol{t = ln\ x}$ y con $\boldsymbol{y'' = \frac{1}{x^2}(D(D-1)y)}$; $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x} Dy}$, se tiene que

$$x^2\left[\frac{1}{x^2}(D(D-1)y)\right] - 2x\left[\frac{1}{x}Dy\right] + 2y = 6 \Rightarrow \boldsymbol{D^2 y - 3Dy + 2y = 6}$$

La ecuación tendrá una solución de la forma $Y = y_h + y_p$, entonces

$$y_h: D^2y - 3Dy + 2y = 0 \overset{Ec.Auxiliar}{\Longrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \overset{Factorizando}{\Longrightarrow} (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Entonces, con la raíces $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, se tiene que

$$\boldsymbol{y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^t}$$

Por su parte, la solución particular, será de la forma

$$y_p = A \to y'_p = 0 \to y''_p = 0$$

Sustituyendo en la ecuación con cambio de variable

$$2A = 6 \Rightarrow \boldsymbol{A = 3}$$

Finalmente, la solución general

$$\boldsymbol{Y = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + 3}$$

Devolviendo el cambio de variable

$$\boldsymbol{Y = C_1 x^2 + C_2 x + 3 \to Y' = 2C_1 x + C_2}$$

Con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 + 3 = 3 \Longrightarrow C_1 + 1 - 2C_1 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{C_1 = 1} \\ y'(1) = 2C_1 + C_2 = 1 \Longrightarrow C_2 = 1 - 2C_1 \Longrightarrow \boldsymbol{C_2 = -1} \end{cases}$$

En particular, la solución de la ecuación

$$\boldsymbol{Y = x^2 - x + 3}$$

Elaborado por: **José Ignacio Palma Misle** (*13-11044*)
Revisado por: **Prof. Nicolás Adames**